

# Κεφάλαιο 5

## Προσομοιώματα μικρομηχανικής

---

Τα πετρώματα είναι ανομοιογενή υλικά, τόσο λόγω των διαφορετικών ορυκτών που τα συνιστούν όσο και λόγω της παρουσίας κενών, όπως πόρων και μικρορωγμών. Οι ετερογένειες αυτές επιδρούν στις μακροσκοπικές παραμέτρους μηχανικής συμπεριφοράς του πετρώματος. Με τα διάφορα προσομοιώματα μικρομηχανικής, που εξετάζουν τη μηχανική συμπεριφορά των υλικών στην κλίμακα της μικροδομής του, επιχειρείται η ποσοτική εξήγηση εμπειρικών παρατηρήσεων μακροσκοπικής συμπεριφοράς, όπως π.χ. η μείωση του μακροσκοπικού μέτρου ελαστικότητας του πετρώματος με την αύξηση του πορώδους, ή η αλληλεπίδραση των μικρορωγμών με την αύξηση της φόρτισης ενός δοκιμίου πετρώματος.

Οι μακροσκοπικές παράμετροι που υπολογίζονται σύμφωνα με τα διάφορα μοντέλα μικρομηχανικής θεωρούνται αντιπροσωπευτικές ενός ομοιογενούς σε μακροσκοπική κλίμακα μέσου. Στη μικρομηχανική αυτό το υποθετικό μέσο συχνά καλείται ενεργό μέσο (effective medium).

### 1 Ελαστικές σταθερές ετερογενούς πετρώματος

Συχνά, για διάφορους λόγους, είναι επιθυμητός ο υπολογισμός των ελαστικών σταθερών ενός ετερογενούς πετρώματος με βάση τις ιδιότητες των διαφόρων ορυκτών συστατικών του. Για να πραγματοποιηθεί αυτό με ακρίβεια πρέπει να είναι γνωστά:

- οι ελαστικές σταθερές των ορυκτών συστατικών του πετρώματος
- τα κατ' όγκον ποσοστά κάθε συστατικού στο πέτρωμα
- οι γεωμετρικές λεπτομέρειες της δομής του πετρώματος.

Συνήθως οι γεωμετρικές λεπτομέρειες δεν είναι γνωστές και είναι δύσκολο να καθορισθούν. Χωρίς αυτές, είναι δυνατός μόνο ο υπολογισμός άνω και κάτω ορίων των ελαστικών σταθερών.

Για ομοιογενές πέτρωμα, χωρίς πόρους και μικρορωγμές, η ογκομετρική παραμόρφωση τεμάχους όγκου  $V$ , που υποβάλλεται σε ομοιόμορφη πίεση  $P$  σε όλη του την επιφάνεια, είναι ίση με  $P/K$ , όπου  $K$  το μέτρο συστολής του πετρώματος. Η μείωση του όγκου του τεμάχους θα είναι ίση με  $\Delta V = PV/K$ .

Σε ένα πέτρωμα με  $N$  διαφορετικά ορυκτά συστατικά με μέτρο συστολής κάθε ορυκτού  $K_i$ , ( $i=1,2,3,\dots,N$ ) η παραμόρφωση στο εσωτερικό του πετρώματος, λόγω εξωτερικής υδροστατικής πίεσης  $P$ , δεν θα είναι ομοιόμορφη. Γενικά, τα πιο δύσκαμπτα ορυκτά θα παραμορφωθούν λιγότερο από τα ενδοτικότερα. Η ακριβής τιμή της παραμόρφωσης κάθε κόκκου του πετρώματος θα εξαρτάται από το ορυκτό και τη γεωμετρική του θέση μέσα στο πέτρωμα. Παρόλα αυτά το πέτρωμα θα υποστεί μία μείωση όγκου, έστω  $\Delta V$ . Από μακροσκοπικής άποψης, ορίζεται το ενεργό μέτρο συστολής  $K_{\text{eff}}$  ως το μέτρο

συστολής ενός υποθετικού ομοιογενούς πετρώματος που υφίσταται την ίδια μείωση όγκου με το πραγματικό ετερογενές πέτρωμα, δηλ.

$$K_{eff} = P \frac{V}{\Delta V} \quad (1)$$

Ο ακριβής υπολογισμός του  $K_{eff}$  απαιτεί την ακριβή γνώση της μικροδομής του πετρώματος, που στην πράξη δεν είναι ποτέ γνωστή. Εντούτοις, εάν είναι γνωστά το ποσοστό  $\chi_i$  και το  $K_i$  κάθε ορυκτού στο πέτρωμα, το  $K_{eff}$  του πετρώματος μπορεί να υπολογισθεί από τις θεωρίες των Reuss, Voigt και Hill.

Ο Reuss (1929), υιοθέτησε την παραδοχή ότι (οι κόκκοι του πετρώματος είναι διατεταγμένοι «σε σειρά» και επομένως) η τάση στο εσωτερικό του πετρώματος είναι ομοιόμορφη. Συνεπώς, κάθε ορυκτό θα υφίσταται μείωση όγκου  $\Delta V_i$  εξαρτώμενη από την υδροστατική πίεση  $P$  και το  $K_i$ , σύμφωνα με τη σχέση:

$$\Delta V_i = P \frac{V_i}{K_i} \quad (2)$$

Η συνολική μεταβολή του όγκου (των σε σειρά κόκκων) θα είναι το άθροισμα των επί μέρους μεταβολών των ορυκτών συστατικών του πετρώματος:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^N \Delta V_i = \sum_{i=1}^N \frac{P V_i}{K_i} = \sum_{i=1}^N \frac{P \chi_i V}{K_i} = P V \sum_{i=1}^N \frac{\chi_i}{K_i} \quad (3)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) προκύπτει,

$$K_{eff}^{Reuss} = \frac{P V}{\Delta V} = \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\chi_i}{K_i} \right]^{-1} \quad (4)$$

Το μέτρο συμπιεστότητας (compressibility modulus) είναι:

$$C_{eff}^{Reuss} = 1 / K_{eff}^{Reuss} = \sum_{i=1}^N \frac{\chi_i}{K_i} = \sum_{i=1}^N \chi_i C_i \quad (5)$$

Σύμφωνα με τον Voigt (1889), (οι κόκκοι του πετρώματος είναι διατεταγμένοι «παράλληλα» και επομένως) η ογκομετρική παραμόρφωση θεωρείται σταθερή μέσα στο ετερογενές σώμα. Έτσι, η μέση ορθή τάση σε κάθε συστατικό (της παράλληλης διάταξης) θα είναι ίση με  $\sigma_{m,i} = \varepsilon_v K_i$  και ο μέσος όρος της μέσης ορθής τάσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\langle \sigma_m \rangle = \sum_{i=1}^N \chi_i \sigma_{m,i} = \sum_{i=1}^N \chi_i \varepsilon_v K_i = \varepsilon_v \sum_{i=1}^N \chi_i K_i \quad (6)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1) προκύπτει

$$K_{eff}^{Voigt} = \frac{PV}{\Delta V} = \frac{P}{\epsilon_v} = \frac{\langle \sigma_m \rangle}{\epsilon_v} = \sum_{i=1}^N \chi_i K_i \quad (7)$$

Το μέτρο συμπιεστότητας υπολογίζεται ως:

$$C_{eff}^{Voigt} = 1/K_{eff}^{Voigt} = \left[ \sum_{i=1}^N \chi_i K_i \right]^{-1} = \left[ \sum_{i=1}^N \frac{\chi_i}{C_i} \right]^{-1} \quad (8)$$

Η τιμή του  $K_{eff}$  που υπολογίζεται από την υπόθεση του Voigt είναι μεγαλύτερη από εκείνη που υπολογίζεται σύμφωνα με τον Reuss. Ο Hill (1952) έδειξε ότι οι δύο τιμές αποτελούν τα άνω και κάτω όρια της πραγματικής τιμής του  $K_{eff}$ , δηλ.  $K_{eff}^{Reuss} \leq K_{eff} \leq K_{eff}^{Voigt}$ . Επιπλέον, προτείνει ως μία καλή προσέγγιση για το  $K_{eff}$  τη μέση τιμή των τιμών Reuss και Voigt, γνωστή ως τιμή Voigt-Reuss-Hill (ή τιμή VRH):

$$K_{eff}^{VRH} = \frac{1}{2} [K_{eff}^{Reuss} + K_{eff}^{Voigt}] \quad (9)$$

Οι μέθοδοι των Voigt, Reuss και Hill μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την εκτίμηση του ενεργού μέτρου διάτμησης (effective shear modulus) ετερογενών πετρωμάτων. Στην περίπτωση αυτή:

$$\left[ \sum_{i=1}^N \frac{\chi_i}{G_i} \right]^{-1} = G_{eff}^{Reuss} \leq G_{eff} \leq G_{eff}^{Voigt} = \sum_{i=1}^N \chi_i G_i \quad (10)$$

$$G_{eff}^{VRH} = \frac{1}{2} [G_{eff}^{Reuss} + G_{eff}^{Voigt}] \quad (11)$$

Τα όρια του ενεργού μέτρου ελαστικότητας μπορούν να υπολογισθούν από τα όρια των  $K_{eff}$  και  $G_{eff}$  μέσω της ταυτότητας

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{3G} + \frac{1}{9K} \quad (12)$$

Τιμές των ελαστικών σταθερών διαφόρων ορυκτών δίνονται στον Πίνακα 1 (Mavko et al. 1998).

Πίνακας 1. Πυκνότητα, ελαστικές σταθερές και ταχύτητες διάδοσης ελαστικών κυμάτων για ορισμένα συνηθισμένα ορυκτά.

Ορυκτό	Πυκνότητα (g/cm <sup>3</sup> )	Μέτρο συστολής, K (GPa)	Μέτρο διάτμησης, G (GPa)	V <sub>p</sub> (km/s)	V <sub>s</sub> (km/s)	Λόγος Poisson
Χαλαζίας	2.65	36.6	45	6.04	4.12	0.06
Ασβεστίτης	2.71	76.8	32	6.64	3.44	0.32
Δολομίτης	2.87	94.9	45	7.35	3.96	0.30
Καολίνης	1.58	1.5	1.4	1.46	0.94	0.14
Μοσκοβίτης	2.79	61.5	41.1	6.46	3.84	0.23
Αλβίτης	2.63	75.6	25.6	6.46	3.12	0.35
Ολιβίνης	3.32	130	80	8.45	4.91	0.24
Πυρίτης	4.93	147.4	132.5	8.11	5.18	0.15
Νερό	1	2.25	0	1.5	0	0.5

## 2 Επίδραση των πόρων στη συμπίεσιμότητα του πετρώματος

Το πορώδες πέτρωμα που δείχνεται στο Σχήμα 1 έχει όγκο  $V_b$ , που είναι το άθροισμα του όγκου  $V_m$  που καταλαμβάνουν τα στερεά συστατικά του πετρώματος και του όγκου  $V_p$  που καταλαμβάνουν οι πόροι του.

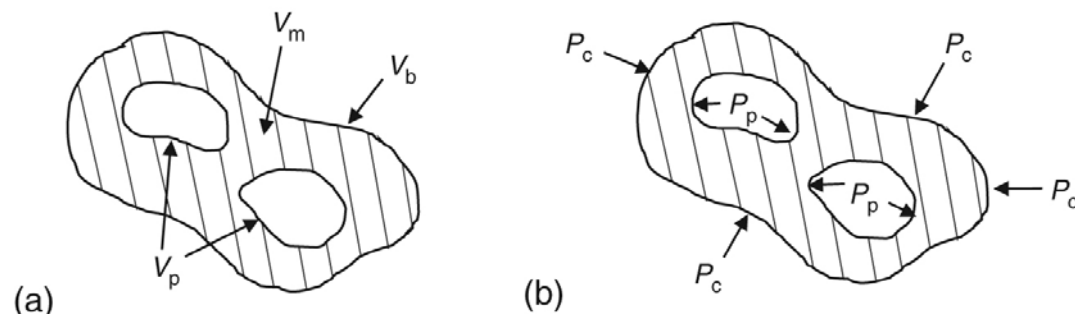
$$V_b = V_m + V_p \quad (13)$$

Το σχετικό ποσοστό των πόρων και των στερεών του πετρώματος μπορεί να οριστεί από το πορώδες του

$$\eta = V_p / V_b, \quad 0 \leq \eta < 1 \quad (14)$$

ή από το δείκτη κενών

$$e = V_p / V_m = \eta / (1 - \eta) \quad (15)$$



Σχήμα 1. (α) Πορώδες πέτρωμα όγκου  $V_b$  με τους όγκους των στερεών και των κενών,  $V_m$  και  $V_p$  αντίστοιχα. (β) Εξωτερική πίεση  $P_c$  και πίεση πόρων  $P_p$ .

Θεωρείται, ότι το πορώδες πέτρωμα υποβάλλεται σε εξωτερική υδροστατική πίεση  $P_c$  και σε πίεση  $P_p$  στο εσωτερικό των πόρων του. Εάν θεωρηθεί ότι η πίεση  $P_p$  παραμένει σταθερή, ο λόγος του ρυθμού μεταβολής του όγκου των πόρων λόγω της  $P_c$  προς τον αρχικό τους όγκο ορίζει την συμπιεστότητα του συστήματος των πόρων  $C_{pc}$ , δηλ. :

$$C_{pc} = \frac{-1}{V_p^i} \left( \frac{\partial V_p}{\partial P_c} \right)_{P_p=ct} \quad (16)$$

Αντίστοιχα, ορίζεται η συμπιεστότητα του ετερογενούς πετρώματος  $C_{bc}$ , ως ο λόγος του ρυθμού μεταβολής του όγκου του προς τον αρχικό του όγκο λόγω της  $P_c$ :

$$C_{bc} = \frac{-1}{V_b^i} \left( \frac{\partial V_b}{\partial P_c} \right)_{P_p=ct} \quad (17)$$

Το ενεργό μέτρο συστολής  $K=K_{eff}$  (στη συνέχεια χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $K$  αντί του  $K_{eff}$ ) του πετρώματος εξαρτάται από τη συμπιεστότητα των στερεών συστατικών του και τη συμπιεστότητα των πόρων του:

$$\frac{1}{K} = C_{bc} = C_m + \eta C_{pc} \quad (18)$$

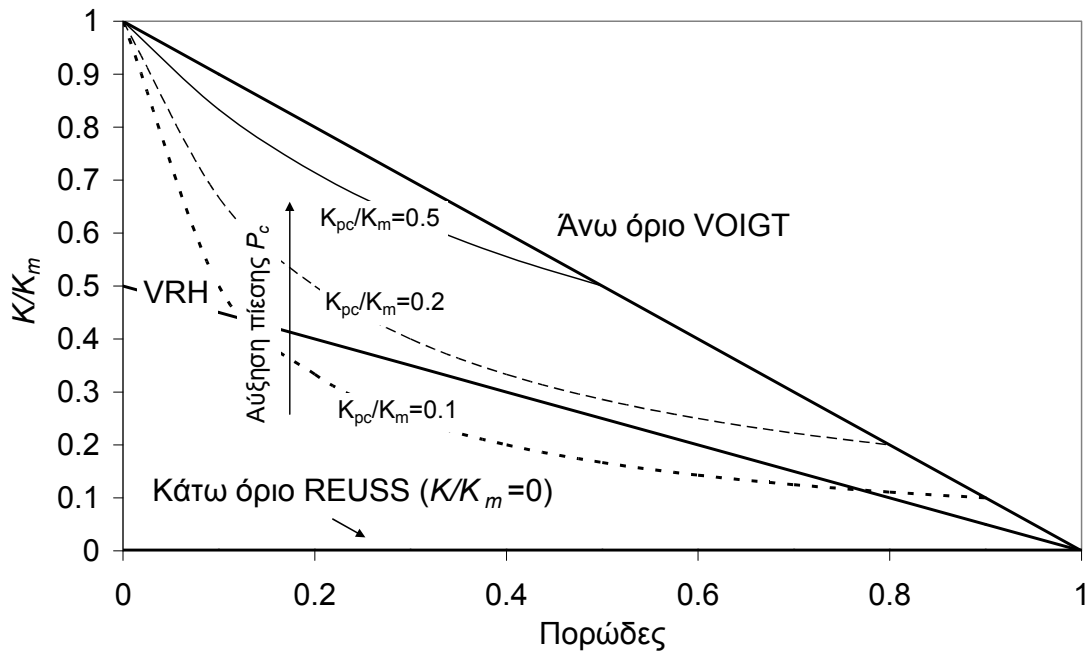
όπου  $C_m$  η συμπιεστότητα των στερεών συστατικών του ετερογενούς πετρώματος. Για πέτρωμα συνιστάμενο από πολλά ορυκτά μπορεί να υπολογισθεί π.χ. με τις μεθόδους Reuss, Voigt ή VRH. Διαιρώντας τα δύο μέλη της (18) με  $C_m$ , προκύπτει:

$$\frac{C_{bc}}{C_m} = 1 + \eta \frac{C_{pc}}{C_m} \quad (19)$$

Θέτοντας  $C_m = 1/K_m$ ,  $C_{pc} = 1/K_{pc}$ ,  $C_{bc} = 1/K$  η (19) ύστερα από αντικαταστάσεις γίνεται:

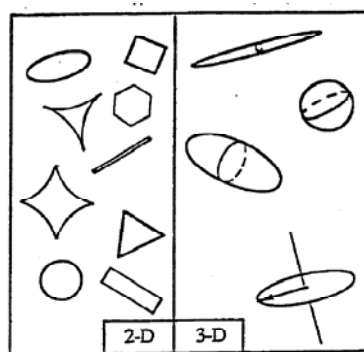
$$\frac{K}{K_m} = \frac{1}{1 + \eta \frac{1}{K_{pc}/K_m}} \quad (20)$$

Στο Σχήμα 2 δείχνεται η μεταβολή του λόγου  $K/K_m$  συναρτήσει του πορώδους για τρεις τιμές του λόγου  $K_{pc}/K_m$ . Στο ίδιο διάγραμμα δείχνεται το άνω όριο του  $K/K_m$  κατά Voigt θεωρώντας το μέτρο συστολής του κενού των πόρων ίσο με μηδέν, η αντίστοιχη υπόθεση κατά Reuss, που δίνει μέτρο συστολής μηδέν για κάθε τιμή του πορώδους και η τιμή VRH.



Σχήμα 2. Μεταβολή του λόγου  $K/K_m$  συναρτήσει του πορώδους για τρεις τιμές του λόγου  $K_{pc}/K_m$ .

Η συμπίεστικότητα  $C_{pc}$  παριστάνει τη συμπίεστικότητα του συστήματος των πόρων του πετρώματος. Οι υπάρχουσες μέθοδοι που συσχετίζουν τη συμπίεστικότητα με τη δομή των πόρων θεωρούν ότι οι πόροι υπάρχουν στο πέτρωμα ως μεμονωμένα κενά. Τα κενά αυτά θεωρούνται ως οπές δύο ή τριών διαστάσεων ενώ η συμπίεστικότητά τους υπολογίζεται επιλύοντας το πρόβλημα ελαστικότητας μίας αφόρτιστης οπής σε άπειρο ελαστικό μέσο με εντατικές συνοριακές συνθήκες στο άπειρο. Έτσι, η υπολογιζόμενη συμπίεστικότητα εξαρτάται από το θεωρούμενο σχήμα της οπής (Σχήμα 3), συνήθως κυκλικό ή ελλειπτικό.



Σχήμα 3. Συνήθη σχήματα θεωρούμενων οπών δύο και τριών διαστάσεων για την αναπαράσταση των πόρων του πετρώματος.

Για κυκλική οπή σε άπειρο ελαστικό μέσο που υφίσταται υδροστατική πίεση  $P$  στο άπειρο η συμπίεστικότητα δίνεται από τη σχέση:

$$C_{pc}(\text{circle}) = \frac{2(1-\nu_m)}{G_m} \quad (21)$$

$G_m$ ,  $\nu_m$  είναι οι ελαστικές σταθερές του συμπαγούς πετρώματος. Για ελλειπτική οπή η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$C_{pc}(\text{ellipse}) = \frac{1-\nu_m}{G_m} \left( \alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \quad (22)$$

$\alpha = b/c \leq 1$  είναι ο λόγος του μικρού προς τον μεγάλο άξονα της έλλειψης.

Η συμπίεστικότητα πόρων τριών διαστάσεων εξετάζεται συνήθως για πόρους σφαιροειδούς σχήματος. Τα σφαιροειδή προκύπτουν με περιστροφή μίας επίπεδης έλλειψης ως προς τον μικρό ή τον μεγάλο άξονα. Με περιστροφή γύρω από τον μικρό άξονα προκύπτει ένα πεπλατυσμένο σφαιροειδές (oblate spheroid), ενώ με περιστροφή γύρω από τον μεγάλο άξονα προκύπτει ένα επιμήκες σφαιροειδές (prolate spheroid). Το σφαιροειδές έχει τρεις άξονες δύο από τους οποίους είναι ίσοι. Εάν συμβολίσουμε με  $\alpha$  το πηλίκο του άνω άξονα προς έναν από τους δύο ίσους άξονες τότε τα πεπλατυσμένα σφαιροειδή έχουν  $\alpha < 1$  και τα επιμήκη σφαιροειδή  $\alpha > 1$ . Όταν το  $\alpha \rightarrow \infty$  το επιμήκες σφαιροειδές τείνει σε βελονοειδή μορφή (needle-like cylinder) ενώ όταν το  $\alpha \rightarrow 0$  το πεπλατυσμένο σφαιροειδές τείνει σε λεπτή ρωγμή κυκλικής κάτοψης (penny-shaped crack).

Για πόρους σφαιρικού σχήματος ( $\alpha = 1$ ), η συμπίεστικότητα είναι:

$$C_{pc}(\text{sphere}) = C_m \frac{3(1-\nu_m)}{2(1-2\nu_m)} \quad (23)$$

Για πόρους σχήματος ρωγμής κυκλικής κάτοψης (μικρές τιμές του  $\alpha$ ), η συμπίεστικότητα είναι:

$$C_{pc}(\text{penny-shaped crack}) = \frac{2(1-\nu_m)}{\pi\alpha G_m} \quad (24)$$

Για ένα πέτρωμα με  $N$  πεπλατυσμένες ρωγμές με μεγάλο άξονα  $c$  η συμπίεστικότητα δίνεται από τη σχέση:

$$C_{bc} = C_m \left[ 1 + \frac{16(1-\nu_m^2)}{9(1-2\nu_m)} \Gamma \right] \quad (25)$$

Όπου  $\Gamma$  αδιάστατη παράμετρος που εκφράζει την πυκνότητα των ρωγμών.

$$\Gamma = \frac{Nc^3}{V_b} \quad (26)$$

### 3 Κλείσιμο ρωγμών

Τα κρυσταλλικά πετρώματα περιέχουν μικρορωγμές πολύ λεπτές κατά τη μία διεύθυνση, που κάτω από αρκούντως υψηλές διαφορικές πιέσεις (εξωτερική πίεση μείων πίεση πόρων) μπορούν να κλείνουν, έτσι ώστε από κάποιο σημείο και πέρα να μην επηρεάζουν τη συμπεριφορά του πετρώματος. Καθώς διαφορετικές ρωγμές κλείνουν σε διαφορετικά φορτία το αποτέλεσμα είναι μία μη γραμμική συμπεριφορά στην καμπύλη τάσης-τροπής του πετρώματος. Έτσι, το αρχικό μη γραμμικό τμήμα της καμπύλης τάσης-τροπής του πετρώματος (βλ. Κεφάλαιο 2) προσεγγίζεται θεωρητικά με την υπόθεση ότι το αφόρτιστο πέτρωμα περιέχει μία κατανομή ελλειψοειδών ή σφαιροειδών ρωγμών με διάφορους λόγους αξόνων που κλείνουν σταδιακά καθώς το πέτρωμα φορτίζεται.

Η τάση στην οποία μία τέτοια ρωγμή κλείνει σχετίζεται με την συμπίεστικότητα της ρωγμής και δίνεται από τη σχέση:

$$P_c(\text{closing}) = P^* = \frac{1}{C_{pc}} \quad (27)$$

Συνδυάζοντας την (27) με την (24) προκύπτει η τάση στην οποία κλείνουν οι πεπλατυσμένες ρωγμές αρχικού λόγου πλευρών  $\alpha$ :

$$P^*(\text{penny - shaped crack}) = \frac{\pi \alpha G_m}{2(1 - \nu_m)} = \frac{3\pi \alpha (1 - 2\nu_m)}{4(1 - \nu_m^2)C_m} \quad (28)$$

Για  $\nu_m=0.3$ ,  $\frac{3\pi (1 - 2\nu_m)}{4(1 - \nu_m^2)} = 1.035 \approx 1.0$  και η (28) γίνεται:

$$P^*(\text{penny - shaped crack}, \nu_m = 0.3) \approx \frac{\alpha}{C_m}$$

Θεωρείται ότι το πέτρωμα έχει ρωγμές με διάφορους λόγους αξόνων. Όσο αυξάνεται η εξωτερική πίεση όλο και περισσότερες από αυτές κλείνουν μειώνοντας τη συμπίεστικότητα του ετερογενούς πετρώματος. Σε κάθε πίεση  $P_c=P$ , σύμφωνα με την (28), οι ανοικτές ρωγμές έχουν αρχικό λόγο αξόνων:

$$\alpha > \frac{4(1 - \nu_m^2)C_m}{3\pi(1 - 2\nu_m)} P \quad (29)$$

Εάν τώρα θεωρηθεί ότι η αδιάστατη πυκνότητα ρωγμών  $\Gamma$  της σχέσης (25) εκφράζει την πυκνότητα των ανοικτών ρωγμών μόνο, παραγωγίζοντας την (25) ως προς την ασκούμενη πίεση προκύπτει:

$$\frac{dC_{bc}}{dP} = \frac{dC_{bc}}{d\Gamma} \frac{d\Gamma}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dP} = \frac{4\pi}{3} \left[ \frac{4(1 - \nu_m^2)C_m}{3\pi(1 - 2\nu_m)} \right]^2 \frac{d\Gamma}{d\alpha} \quad (30)$$

και συνεπώς



$$\frac{d\Gamma}{d\alpha} = \frac{3}{4\pi} \left[ \frac{3\pi(1-2\nu_m)}{4(1-\nu_m^2)C_m} \right]^2 \left[ \frac{dC_{bc}}{dP} \right]_{P=P^*} \quad (31)$$

Όπως φαίνεται από την (31) η παράγωγος  $d\Gamma/d\alpha$  είναι ανάλογη με την παράγωγο της συμπιεστότητας του πετρώματος. Η συμπιεστότητα του πετρώματος συναρτήσει της πίεσης μπορεί να περιγραφεί από εκθετικές καμπύλες της μορφής

$$C_{bc} = C_{bc}^\infty + (C_{bc}^i - C_{bc}^\infty) e^{-P/\hat{P}} \quad (32)$$

όπου ο εκθέτης  $i$  συμβολίζει την αρχική τιμή της συμπιεστότητας (σε μηδενική τάση) και ο εκθέτης  $\infty$  την τιμή σε ψηλές τάσεις και  $\hat{P}$  είναι μία χαρακτηριστική τιμή. Οι παράμετροι  $C_{bc}^\infty$ ,  $C_{bc}^i$  και  $\hat{P}$  προσδιορίζονται με προσαρμογή της καμπύλης (32) σε πειραματικά δεδομένα. Αντικαθιστώντας την (32) στην (31) προκύπτει:

$$\frac{d\Gamma}{d\alpha} = \left[ \frac{9\pi(1-2\nu_m)}{16(1-\nu_m^2)C_m} \right]^2 \frac{(C_{bc}^i - C_{bc}^\infty)}{\hat{\alpha}} e^{-\alpha/\hat{\alpha}} \quad (33)$$

Η συνάρτηση κατανομής του πορώδους μπορεί να εκφρασθεί συναρτήσει της συνάρτησης κατανομής των λόγων αξόνων των ρωγμών ως εξής:

$$c(\alpha) = \frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{4\pi\alpha}{3} \frac{d\Gamma}{d\alpha} \quad (34)$$

Το ολικό πορώδες προκύπτει με ολοκλήρωση της  $c(\alpha)$  για τιμές του  $\alpha$  από 0 έως 1. Λόγω της μορφής της  $c(\alpha)$  η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει από 0 έως άπειρο, οπότε προκύπτει:

$$\eta_{crack} = (C_{bc}^i - C_{bc}^\infty) \hat{P} \quad (35)$$

## 4 Θεωρίες ενεργού μέσου

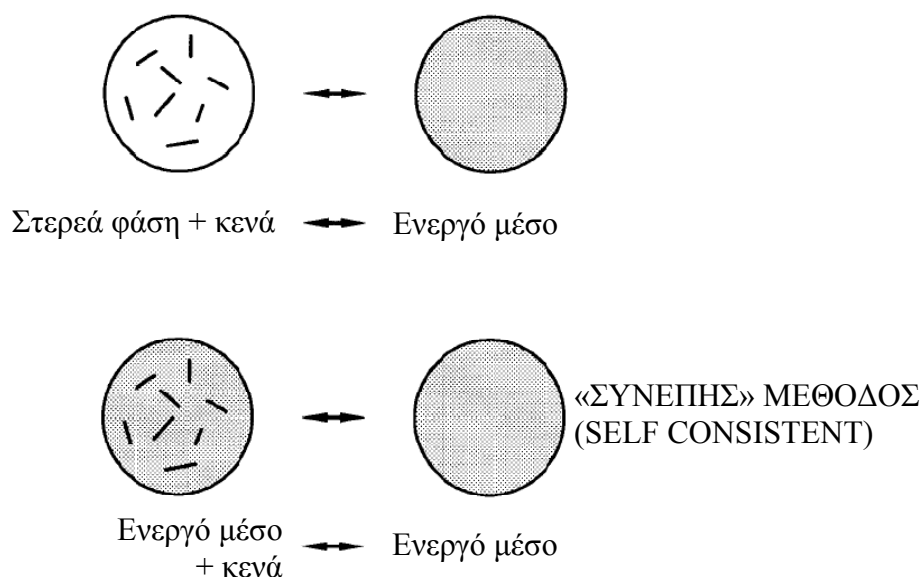
Στις θεωρίες ενεργού μέσου, το ετερογενές πέτρωμα θεωρείται ότι συνίσταται από τα στερεά συστατικά και τους πόρους και τις μικρορωγμές. Οι μηχανικές ιδιότητες της στερεάς φάσης θεωρούνται γνωστές ή μπορούν να υπολογισθούν, π.χ. με τα μοντέλα VRH (βλ. παραγρ. 1). Στη στερεά φάση προστίθεται ένας πόρος ή μία μικρορωγή και υπολογίζονται οι ιδιότητες του προκύπτοντος μέσου. Η ανάλυση μπορεί να προχωρήσει με δύο τρόπους:

α) υποθέτοντας ότι περαιτέρω προσθήκη μίας χαμηλής περιεκτικότητας πόρων ή ρωγμών μεταβάλλει τις ιδιότητες του προκύπτοντος μέσου απλά προσθέτοντας την επίδραση κάθε πόρου ή ρωγμής. Αυτή η θεώρηση μπορεί να έχει ισχύ μόνο για χαμηλές συγκεντρώσεις πόρων ή ρωγμών, αφού αλληλεπιδράσεις μεταξύ των πόρων δεν λαμβάνονται υπόψη. Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάστηκε η επίδραση του

σχήματος των πόρων στη συμπεστικότητα του πετρώματος θεωρώντας ότι ο κάθε πόρος περιβάλλεται από ένα άπειρο ελαστικό μέσο, αγνοήθηκε δηλαδή η επίδραση που ασκεί η γειτνίαση πόρων στο εντατικό πεδίο που αναπτύσσεται γύρω τους. Στην πραγματικότητα η συμπεστικότητα των πόρων αυξάνεται λόγω της παρουσίας των γειτονικών πόρων.

β) περαιτέρω προσθήκη ενός πόρου (ή μίας ρωγμής) μεταβάλλει τις ιδιότητες ενός μέσου που έχει ήδη τις ιδιότητες του ενεργού μέσου. Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως «συνεπής» μέθοδος (self-consistent) και θεωρείται ότι έχει ισχύ και σε υψηλές συγκεντρώσεις πόρων. Και στις δύο περιπτώσεις, το μέγεθος των πόρων ή των ρωγμών πρέπει να είναι μικρό συγκρινόμενο με το αντιπροσωπευτικό μέγεθος δείγματος του πετρώματος.

Οι δύο διαφορετικές προσεγγίσεις εξηγούνται σχηματικά παρακάτω:



Σχήμα 4. Διαφορετικές προσεγγίσεις ενεργού μέσου.

Οι μηχανικές παράμετροι του ενεργού μέσου μπορούν να υπολογισθούν είτε με βάση την απώλεια της ενέργειας παραμόρφωσης λόγω της ύπαρξης ενός κενού στο συμπαγές πέτρωμα, είτε με βάση τις εξισώσεις της κυματικής (δυναμική μέθοδος ή μέθοδος Kuster-Toksoz ή μέθοδος K-T).

#### 4.1 Πέτρωμα με σφαιρικό πορώδες

Για σφαιρικό πορώδες, η συμπεστικότητα ενός πόρου δίνεται από τη σχέση (23). Αγνοώντας την αλληλεπίδραση μεταξύ των πόρων (μέθοδος N-I) και αντικαθιστώντας την (23) στην (18) προκύπτει το ενεργό μέτρο συστολής του πετρώματος:

$$\frac{K}{K_m} = \left[ 1 + \frac{3(1-\nu_m)}{2(1-2\nu_m)} \eta \right]^{-1} \quad (36)$$

Το ενεργό μέτρο διάτμησης δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{G}{G_m} = \left[ 1 + \frac{15(1-\nu_m)}{(7-5\nu_m)}\eta \right]^{-1} \quad (37)$$

Οι παραπάνω σχέσεις υπερεκτιμούν τα ενεργά  $K$  και  $G$  αφού π.χ. για πορώδες 100 % δίνουν πεπερασμένες τιμές.

Σύμφωνα με την «συνεπή» μέθοδο (μέθοδος S-C) των Hill (1965) και Budiansky (1965) θεωρείται ότι κάθε πόρος ευρίσκεται σε ένα ενεργό συνεχές μέσο με ελαστικές σταθερές εκείνες του πορώδους πετρώματος. Έτσι τα ενεργά  $K$ ,  $G$  υπολογίζονται από δύο συζευγμένες εξισώσεις:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_m} + \frac{1}{K} \left[ \frac{3K+4G}{4G} \right] \eta \quad (38)$$

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_m} + \frac{1}{G} \left[ \frac{15K+20G}{9K+8G} \right] \eta \quad (39)$$

Οι σχέσεις αυτές δίνουν πολύ μικρότερες τιμές για τα  $K$ ,  $G$  από τις (36), (37). Επιπλέον, υπολογίζουν μηδενικές τιμές για πεπερασμένη τιμή του πορώδους.

Εάν θεωρηθεί ότι ο πόρος  $\kappa+I$  εισάγεται σε ένα ομοιογενές μέσο με ενεργές ελαστικές σταθερές εκείνες ενός πορώδους μέσου με  $\kappa$  πόρους, τότε προκύπτουν δύο πεπλεγμένες εξισώσεις για τις ενεργές ελαστικές σταθερές του πετρώματος:

$$\frac{G}{G_m} = (1-\eta)^2 \left[ \frac{1 + \beta(G/G_m)^{3/5}}{1 + \beta} \right]^{1/3} \quad (40)$$

$$\frac{K}{K_m} = \frac{G}{G_m} \left[ \frac{1 + 2\beta}{1 + 2\beta(G/G_m)^{3/5}} \right] \quad (41)$$

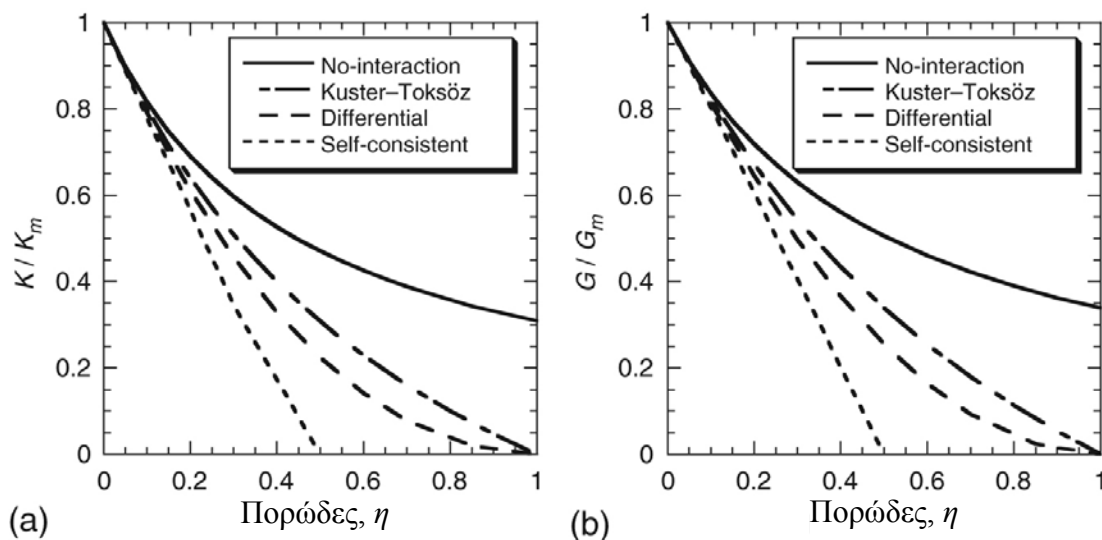
Όπου  $\beta = \frac{1-5\nu_m}{2(1+\nu_m)}$ . Η προσέγγιση αυτή είναι γνωστή ως διαφορική μέθοδος.

Τέλος σύμφωνα με τη δυναμική μέθοδο (μέθοδος K-T):

$$\frac{K}{K_m} = \frac{1-\eta}{1+(3K_m/4G_m)\eta} = \frac{1-\eta}{1+[(1+\nu_m)/2(1-2\nu_m)]\eta} \quad (42)$$

$$\frac{G}{G_m} = \frac{1-\eta}{1+[(6K_m/12G_m)/(9K_m/8G_m)]\eta} = \frac{1-\eta}{1+[2(4-5\nu_m)/(7-5\nu_m)]\eta} \quad (43)$$

Τα αποτελέσματα των τεσσάρων μεθόδων δίνονται στο Σχήμα 5 για  $\nu_m=0.25$ . Για πορώδες μέχρι 0.1 δίνουν παρόμοια αποτελέσματα. Διαφορές παρατηρούνται για τιμές του πορώδους μεγαλύτερες από 0.1.



Σχήμα 5. Ελαστικές σταθερές πετρώματος με ξηρούς, τυχαία κατανεμημένους σφαιρικούς πόρους, σύμφωνα με διάφορες θεωρήσεις. Ο λόγος Poisson λαμβάνεται ίσος με  $\nu_m=0.25$ .

Για  $\nu_m=0.2$ ,  $K_m = 4G_m/3$  και οι προηγούμενες σχέσεις γράφονται ως εξής:

Χωρίς αλληλεπίδραση (μέθοδος N-I):

$$\frac{K}{K_m} = \frac{G}{G_m} = (1 + 2\eta)^{-1} \quad (44)$$

Μέθοδος S-C:

$$\frac{K}{K_m} = \frac{G}{G_m} = 1 - 2\eta \quad (45)$$

Διαφορική μέθοδος :

$$\frac{K}{K_m} = \frac{G}{G_m} = (1 - \eta)^2 \quad (46)$$

Μέθοδος K-T:

$$\frac{K}{K_m} = \frac{G}{G_m} = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad (47)$$

## 4.2 Πέτρωμα με μικρορωγμές (penny-shaped cracks)

Χωρίς αλληλεπίδραση (μέθοδος N-I):

$$\frac{K}{K_m} = \left[ 1 + \frac{16(1-v_m^2)}{9(1-2v_m)} \Gamma \right]^{-1} \quad (48)$$

$$\frac{G}{G_m} = \left[ 1 + \frac{32(1-v_m)(5-v_m)}{45(2-v_m)} \Gamma \right]^{-1} \quad (49)$$

Μέθοδος S-C:

$$\frac{K}{K_m} = 1 - \frac{16(1-v^2)}{9(1-2v)} \Gamma \quad (50)$$

$$\frac{G}{G_m} = 1 - \frac{32(1-v)(5-v)}{45(2-v)} \Gamma \quad (51)$$

$$\Gamma = \frac{45(v_m - v)(2-v)}{16(1-v^2)(10v_m - 3v_m v - v)} \quad (52)$$

Η τρίτη επιλύεται αριθμητικά ως προς  $v$  συναρτήσει του  $\Gamma$ . Η τιμή του  $v$  εισάγεται στις δύο πρώτες για να υπολογιστούν τα  $K$ ,  $G$ . Για  $0 < v_m < 1/2$ , η επόμενη προσεγγιστική σχέση παρέχει την τιμή του ενεργού μέτρου ελαστικότητας με σφάλμα 1%.

$$\frac{E}{E_m} = 1 - \frac{16}{9} \Gamma \quad (53)$$

Διαφορική μέθοδος :

$$e^\Gamma = \left( \frac{3-v}{3-v_m} \right)^{5/128} \left( \frac{1-v}{1-v_m} \right)^{30/128} \left( \frac{1+v}{1+v_m} \right)^{45/128} \left( \frac{v}{v_m} \right)^{-80/128} \quad (54)$$

$$\frac{K}{K_m} = \left( \frac{v}{v_m} \right)^{10/9} \left( \frac{3-v}{3-v_m} \right)^{-1/9} \left( \frac{1-2v}{1-2v_m} \right)^{-1} \quad (55)$$

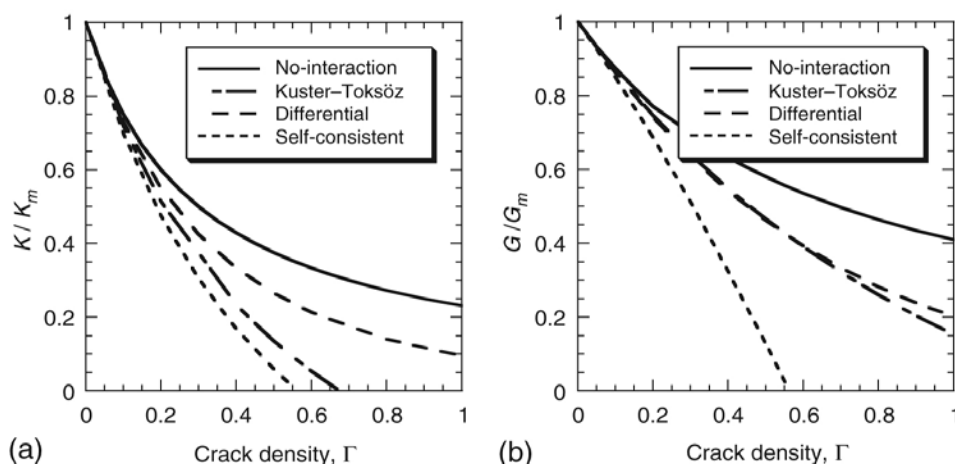
Προσεγγιστικά:

$$\frac{E}{E_m} = e^{-16\Gamma/9}, \quad \frac{v}{v_m} = e^{-8\Gamma/5} \quad (56)$$

Μέθοδος K-T:

$$\frac{K}{K_m} = \frac{1 - [32(1 + \nu_m)/27]\Gamma}{1 + [16(1 + \nu_m)^2/27(1 - 2\nu_m)]\Gamma} \quad (57)$$

$$\frac{G}{G_m} = \frac{1 - [32(5 - \nu_m)(7 - 5\nu_m)/675(2 - \nu_m)]\Gamma}{1 + [64(5 - \nu_m)(4 - 5\nu_m)/675(2 - \nu_m)]\Gamma} \quad (58)$$

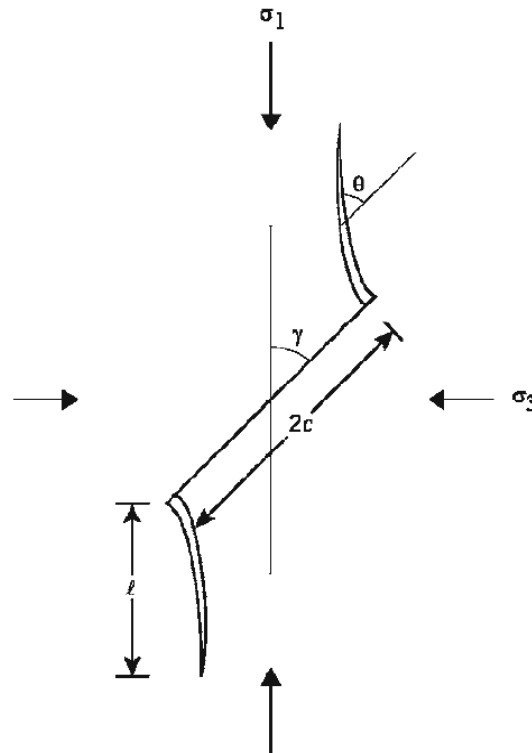


Σχήμα 6. Ελαστικές σταθερές πετρώματος με ξηρές, τυχαία κατανομημένες και τυχαία προσανατολισμένες ρωγμές, σύμφωνα με διάφορες θεωρήσεις. Ο λόγος Poisson λαμβάνεται ίσος με  $\nu_m=0.25$ .

## 5 Μικρομηχανική της ψαθυρής θραύσης

Τα προσομοιώματα μικρομηχανικής της ψαθυρής αστοχία του πετρώματος εξετάζουν την τοπική έναρξη μικρορωγμών, την επέκταση, την αύξηση του πλήθους τους και την αλληλεπίδραση μεταξύ τους με την αύξηση της φόρτισης.

Η έναρξη της μικρορωγμάτωσης στα συμπαγή πολυκρυσταλλικά πετρώματα θεωρείται ότι συμβαίνει σε προϋπάρχουσες μικρορωγμές, όπως π.χ. όρια κόκκων. Το πιο γνωστό μικρομηχανικό μοντέλο για την έναρξη της μικρορωγμάτωσης είναι αυτό της «ολισθαίνουσας ρωγμής» (sliding crack model). Στο Σχήμα 7 μία μικρορωγή μήκους  $2c$  σχηματίζει γωνία  $\gamma$  με τη μέγιστη θλιπτική τάση  $\sigma_1$ . Η ρωγμή κλείνει υπό την επίδραση των θλιπτικών φορτίων και ολισθαίνει υπό την επίδραση των διατμητικών τάσεων στο επίπεδο της. Στα άκρα της ρωγμής συγκεντρώνονται υψηλές εφελκυστικές τάσεις που κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις προκαλούν την έναρξη πλάγιων ρωγμών.



Σχήμα 7. Έναρξη και διάδοση πλευρικών μικρορωγμών στα άκρα μίας προϋπάρχουσας ολισθαίνουσας μικρορωγμής.

Σύμφωνα με τους Cotterell και Rice (1980) οι πλάγιες ρωγμές ξεκινάνε σχηματίζοντας γωνία  $\theta=70.5^\circ$  με την προϋπάρχουσα ρωγμή και δημιουργούνται όταν οι τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_3$  ικανοποιούν τη σχέση:

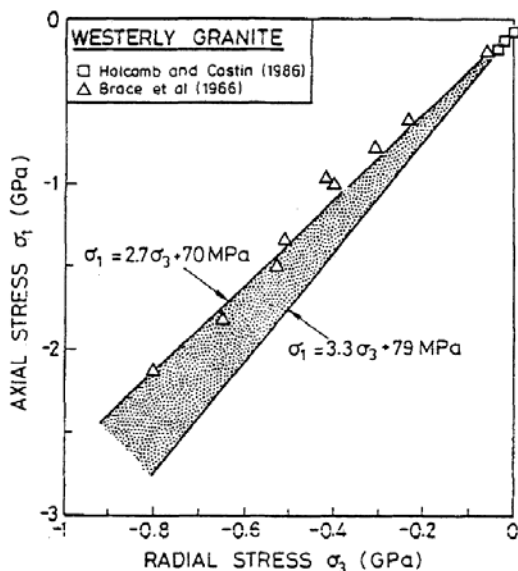
$$\sigma_1 = \frac{\sin 2\gamma + \mu(1 + \cos 2\gamma)}{\sin 2\gamma - \mu(1 - \cos 2\gamma)} \sigma_3 + \frac{\sqrt{3}}{\sin 2\gamma - \mu(1 - \cos 2\gamma)} \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi c}} \quad (59)$$

$K_{IC}$  είναι η δυσθραυστότητα (fracture toughness) του πετρώματος, που εκφράζει την ικανότητα του πετρώματος, που περιέχει μία ρωγμή, να ανθίσταται στη θραύση. Η δυσθραυστότητα του πετρώματος μπορεί να μετρηθεί πειραματικά (ISRM 1988) και έχει μονάδες  $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$ .  $\mu$  είναι ο συντελεστής τριβής της προϋπάρχουσας ρωγμής, και οι γωνίες  $\gamma$  και  $\theta$  ορίζονται στο Σχήμα 7.

Σε μία δοκιμή τριαξονικής θλίψης η έναρξη της διόγκωσης του δοκιμίου μπορεί να συσχετισθεί με την έναρξη των πλευρικών μικρορωγμών. Εάν υποθεθεί ότι το πέτρωμα περιέχει τυχαία προσανατολισμένες προϋπάρχουσες μικρορωγμές τότε η έναρξη των πλευρικών μικρορωγμών θα συμβεί πρώτα στα άκρα εκείνων των μικρορωγμών με γωνία  $\gamma=(1/2)\tan^{-1}(1/\mu)$  σύμφωνα με τη σχέση:

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{1+\mu^2} + \mu}{\sqrt{1+\mu^2} - \mu} \sigma_3 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\mu^2} - \mu} \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi c}} \quad (60)$$

Η έναρξη μικρορωγμών μπορεί να εντοπισθεί πειραματικά με διάφορους τρόπους: από την έναρξη καταγραφής ακουστικής δραστηριότητας του πετρώματος, από το σημείο που το διάγραμμα τάσης-τροπής γίνεται μη γραμμικό, από την αύξηση του όγκου του δοκιμίου.



Σχήμα 8. Πειραματικά δεδομένα έναρξης ρωγμών σε δοκίμια γρανίτη Westerly (οι θλιπτικές τάσεις με αρνητικό πρόσημο).

Στο Σχήμα 8 δείχνονται σχετικά πειραματικά δεδομένα σε άξονες  $\sigma_1$  και  $\sigma_3$ . Στο ίδιο διάγραμμα σχεδιάζονται οι θεωρητικές ευθείες που προκύπτουν από την εξίσωση (66) για  $\mu=0.55 - 0.64$  και αποτεμόμενο τμήμα 70-79 MPa (που αντιστοιχεί σε μήκος ρωγμής  $2c$  περίπου ίσο με 1 mm με  $K_{IC}=1 \text{ MPa m}^{1/2}$ ).

Με την αύξηση της φόρτισης το μήκος  $\ell$  των πλευρικών ρωγμών αυξάνει ενώ η γωνία  $\theta$  τείνει να λάβει την τιμή  $\theta=\gamma$ , δηλ. οι πλευρικές ρωγμές γίνονται παράλληλες με τη  $\sigma_1$ . Ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης<sup>1</sup>  $K_I$  στα άκρα των πλευρικών ρωγμών μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση των Horii και Nemat-Nasser (1985):

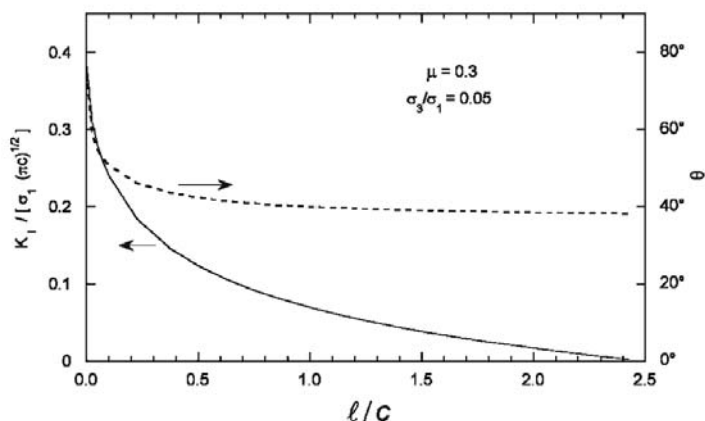
$$\frac{K_I}{\sqrt{\pi c}} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{1 + \mu^2} - (\sigma_1 + \sigma_3)\mu}{\pi\sqrt{L/c}} \sin \theta - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\ell}{c}}(\sigma_1 + \sigma_3 - (\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2(\theta - \gamma)) \quad (61)$$

όπου  $L = \ell + 8c/3\pi^2$  το ενεργό μήκος των πλευρικών ρωγμών. Η γωνία με την οποία διαδίδονται οι πλευρικές ρωγμές προκύπτει με μεγιστοποίηση του  $K_I$  ως προς  $\theta$ .

<sup>1</sup> Σύμφωνα με τον Broek (1988) ως συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων  $K_I$  μπορεί να είναι ορισθεί ο λόγος της τοπικά ασκούμενης τάσης στα άκρα μίας ρωγμής προς την «ονομαστική τάση», που μπορεί να είναι η μέση τάση σε μία διατομή του πετρώματος ή η μέση τάση μακριά από τη ρωγμή ή η κύρια τάση του εντατικού πεδίου μακριά από τη ρωγμή.



Όπως παρατηρείται από την παραπάνω εξίσωση ο συντελεστής συγκέντρωσης τάσης στα άκρα της ρωγμής μειώνεται καθώς αυξάνεται το μήκος της  $\ell$ . Η μείωση αυτή οφείλεται αφενός στην απομάκρυνση του άκρου της πλευρικής ρωγμής από τη θέση δημιουργίας εφελκυστικών τάσεων στα άκρα της προϋπάρχουσας μικρορωγμής και αφετέρου στην επίδραση της ορθής δύναμης που δρα στο επίπεδο της πλευρικής ρωγμής και τείνει να εμποδίσει την επέκτασή της. Στο Σχήμα 9 δείχνεται η μεταβολή του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης και της γωνίας διάδοσης πλευρικής ρωγμής συναρτήσει του  $\ell/c$  για  $\sigma_3/\sigma_1=0.05$ ,  $\mu=0.3$  και  $\gamma=(1/2)\tan^{-1}(1/\mu)=36.7^\circ$ . Οι πλευρικές ρωγμές επεκτείνονται αρχικά σχηματίζοντας γωνία  $\theta=70.5^\circ$  με το επίπεδο της προϋπάρχουσας ρωγμής. Στη συνέχεια η γωνία  $\theta$  μειώνεται και τείνει ασυμπτωτικά στη  $\gamma$ .



Σχήμα 9. Μεταβολή του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης και της γωνίας διάδοσης πλευρικής ρωγμής συναρτήσει του  $\ell/c$  για  $\sigma_3/\sigma_1=0.05$  και  $\mu=0.3$  και  $\gamma=(1/2)\tan^{-1}(1/\mu)=36.7^\circ$ .

Με την αύξηση της φόρτισης το μήκος και ο αριθμός των επεκτεινόμενων πλευρικών ρωγμών αυξάνεται με αποτέλεσμα το εντατικό πεδίο στο περιβάλλον μίας μικρορωγμής να αλληλοεπιδρά με το εντατικό πεδίο των γειτονικών μικρορωγμών. Η αστοχία του πετρώματος θεωρείται ότι επέρχεται λόγω της αλληλεπίδρασης και της συγχώνευσης πολλών πλευρικών μικρορωγμών που ξεκίνησαν από τα άκρα προϋπάρχουσων μικρορωγμών. Το πολύπλοκο αυτό πρόβλημα αντιμετωπίζεται συχνά μέσω της θεωρίας της μηχανικής της βλάβης των υλικών (*damage mechanics*). Η βλάβη του πετρώματος αναπαρίσταται από μία παράμετρο που χαρακτηρίζει την πυκνότητα και τη γεωμετρία των μικρορωγμών και των πόρων του ψαθυρού πετρώματος.

Για την ανάλυση της αλληλεπίδρασης των μικρορωγμών έχουν προταθεί διάφορα εξιδανικευμένα μοντέλα γεωμετρικών διατάξεων όπως αυτά που δείχνονται στο Σχήμα 10. Η διάταξη (α) αναλύθηκε από τους Ashby και Sammis (1990) θεωρώντας ότι όλες οι προϋπάρχουσες μικρορωγμές έχουν ίδιο μήκος  $2c$ . Η εσωτερική παράμετρος που παριστάνει τη βλάβη του πετρώματος καλείται παράμετρος βλάβης (*damage parameter*), συμβολίζεται με  $D$  και δίνεται από τη σχέση:

$$D = \pi(\ell + c \cos \gamma)^2 N_A = \pi \left( \frac{\ell}{c} + \cos \gamma \right)^2 \varepsilon_0 \quad (62)$$

$N_A$  είναι αριθμός των μικρορωγμών στη μοναδιαία επιφάνεια και  $\varepsilon_0 = c^2 N_A$  η πυκνότητα τους. Πριν από τη δημιουργία των πλευρικών μικρορωγμών το μήκος  $\ell$  είναι μηδέν και η αρχική παράμετρος βλάβης  $D_0$  είναι:

$$D_0 = \pi(c \cos \gamma)^2 N_A = \pi \varepsilon_0 \cos^2 \gamma \quad (63)$$

Οι κύριες τάσεις συνδέονται με την παράμετρο βλάβης με τη σχέση:

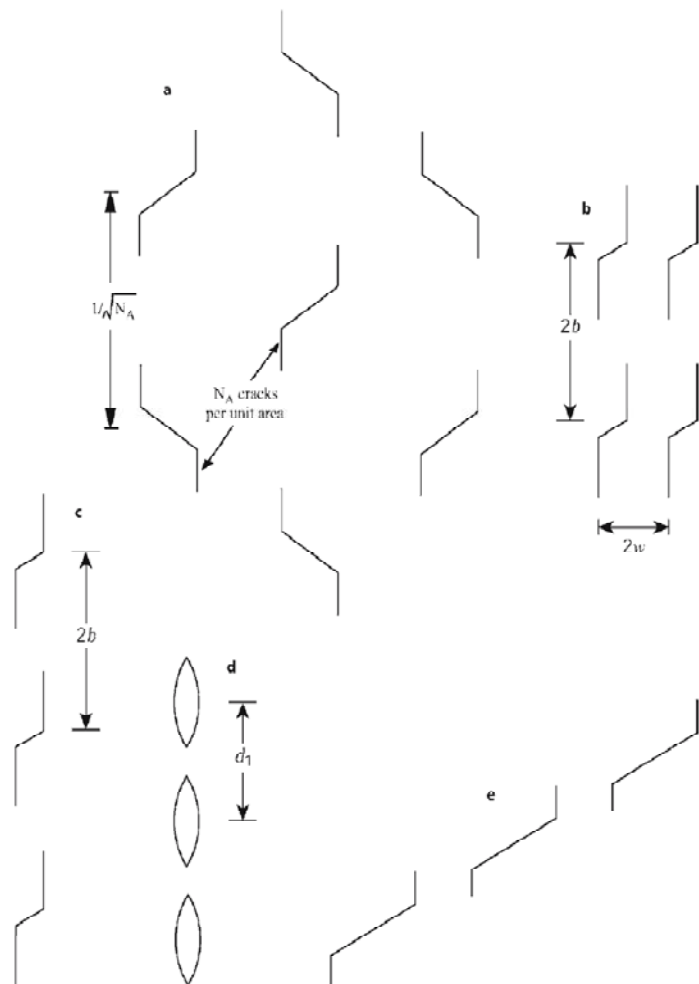
$$\sigma_1 = \left[ C_1 + \frac{C_4 (\sqrt{D/D_0} - 1)}{1 + \sqrt{\pi D_0} \frac{\sqrt{D/D_0} - 1}{1 - \sqrt{D}}} \right] \sigma_3 + \frac{\sqrt{\sqrt{D/D_0} - 1 + 0.1/\cos \gamma}}{1 + \sqrt{\pi D_0} \frac{\sqrt{D/D_0} - 1}{1 - \sqrt{D}}} \frac{C_4}{\sqrt{\cos \gamma}} \frac{K_{Ic}}{\sqrt{\pi c}} \quad (64)$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{1 + \mu^2} + \mu}{\sqrt{1 + \mu^2} - \mu}, \quad C_4 = \frac{\sqrt{3} \cos \gamma}{\sqrt{1 + \mu^2} - \mu}$$

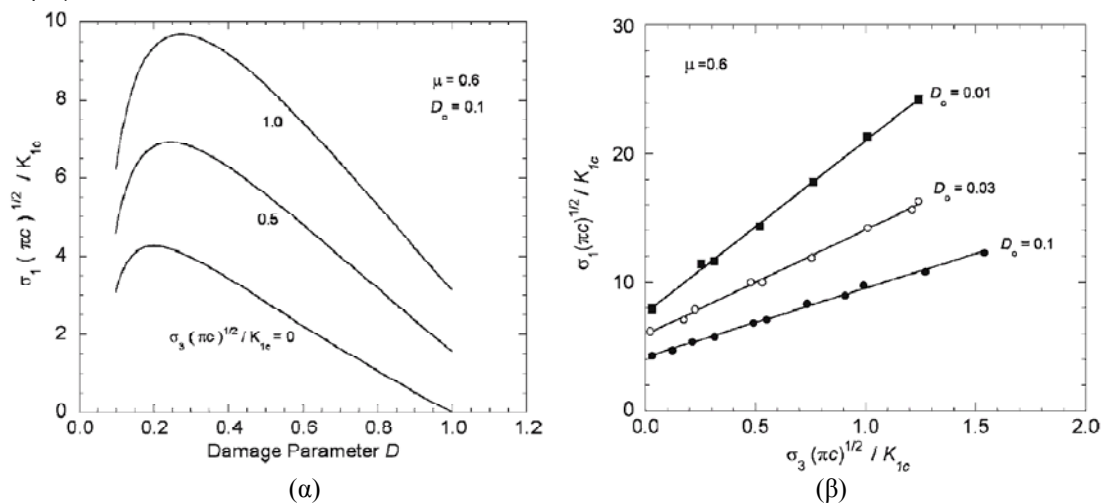
Η σχέση (64) δίνει τη μεταβολή της  $\sigma_1$  συναρτήσει του  $D$  για σταθερή  $\sigma_3$  και καθορισμένες τιμές των  $D_0$ ,  $K_{Ic}/\sqrt{\pi c}$  και  $\mu$ . Σχετικό παράδειγμα δείχνεται στο Σχήμα 11α. Η κρίσιμη εντατική κατάσταση στην οποία συμβαίνει η αστάθεια του δοκιμίου καθορίζεται ως η μέγιστη τιμή της  $\sigma_1$  στο διάγραμμα  $\sigma_1$ - $D$ . Η κρίσιμη αυτή τιμή της  $\sigma_1$  μπορεί να σχεδιαστεί συναρτήσει της πλευρικής τάσης  $\sigma_3$  όπως δείχνεται στο Σχήμα 11β. Όπως φαίνεται από αυτό σε πρώτη προσέγγιση η σχέση της κρίσιμης  $\sigma_1$  με την  $\sigma_3$  μπορεί να θεωρηθεί γραμμική:

$$\sigma_1 = A(\mu, \varepsilon_0) \sigma_3 + B(\mu, \varepsilon_0) K_{Ic} / \sqrt{\pi c} \quad (65)$$

Η σχέση (65) συγκρινόμενη με την εξίσωση του κριτηρίου αστοχίας Mohr-Coulomb συσχετίζει το συντελεστή εσωτερική τριβής του πετρώματος με το συντελεστή τριβής της προϋπάρχουσας μικρορωγμής  $\mu$  και την αρχική βλάβη του πετρώματος  $\varepsilon_0$ . Επίσης συσχετίζει τη συνοχή του πετρώματος με την παράμετρο  $K_{Ic}/\sqrt{\pi c}$ .



Σχήμα 10. Διάφορα εξιδανικευμένα μοντέλα για την ανάλυση της αλληλεπίδρασης των μικρορωγμών στο πέτρωμα.

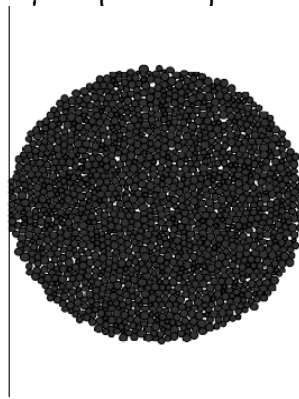


Σχήμα 11. (α) Ανηγμένη κύρια τάση συναρτήσει της παραμέτρου βλάβης  $D$  για  $D_0=0.1$  και  $\mu=0.6$  και τρεις τιμές της ανηγμένης ελάχιστης κύριας τάσης. (β) Μέγιστες τιμές της ανηγμένης κύριας τάσης συναρτήσει της ανηγμένης ελάχιστης κύριας τάσης για τρεις τιμές της αρχικής παραμέτρου βλάβης  $D_0$ .

## 6 Μοντέλα συστήματος σφαιριδίων

Τα μοντέλα συστήματος σφαιριδίων (grain pack models) χρησιμοποιούνται για τη διερεύνηση της μικρομηχανικής συμπεριφοράς των πετρωμάτων, θεωρώντας ότι στην μικροκλίμακα τα πετρώματα μπορούν να θεωρηθούν ως συναθροίσματα σφαιριδίων πολύ μικρού μεγέθους που είναι στερεά συνδεδεμένα μεταξύ τους (bonded) και αλληλεπιδρούν στις επαφές τους σύμφωνα με κάποιο νόμο επαφής (contact law). Τα μοντέλα αυτά είναι συνδεδεμένα με την αριθμητική μέθοδο των διακριτών στοιχείων (Discrete Element Method, DEM) με την οποία υπολογίζεται η κίνηση και η αλληλεπίδραση των σφαιριδίων καθώς και οι δυνάμεις στις επαφές τους και παρέχονται αποτελέσματα όπως η τυχόν θραύση των δεσμών, η ολίσθηση στις επαφές των σφαιριδίων κλπ.

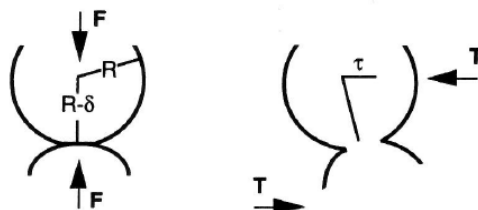
Στα προβλήματα πρακτικού ενδιαφέροντος το πλήθος των σφαιριδίων σε ένα υπολογιστικό μοντέλο είναι πολύ μεγάλο. Στο Σχήμα 12 δείχνεται ένα παράδειγμα χρήσης του προγράμματος διακριτών στοιχείων PFC (Itasca 2007) για την προσομοίωση μίας δοκιμής αντιδιαμετρικής θλίψης, όπου είναι εμφανής ο πολύ μεγάλος αριθμός σφαιριδίων που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση του πετρώματος.



Σχήμα 12. Προσομοίωση δοκιμής αντιδιαμετρικής θλίψης με το πρόγραμμα PFC.

### 6.1 Δυστροπία επαφών και ενεργές ελαστικές σταθερές

Σε κάθε περίπτωση, πρωτεύοντα ρόλο έχει η επιλογή ενός μοντέλου για τις επαφές μεταξύ των σφαιριδίων. Η ορθή δυστροπία  $S_n$  της επαφής δύο όμοιων σφαιριδίων ορίζεται ως η μεταβολή της ορθής δύναμης  $F$  στην επαφή προς την μείωση της ακτίνας των σφαιριδίων  $R-\delta$  (Σχήμα 13). Η εφαπτομενική δυστροπία  $S_t$  ορίζεται ως η μεταβολή της εφαπτομενικής δύναμης  $T$  προς την εφαπτομενική μετατόπιση  $\tau$  του κέντρου σε σχέση με την επαφή.



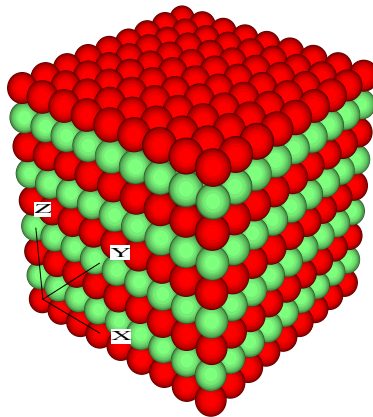
Σχήμα 13. Ορθή και διατμητική δυστροπία επαφής δύο όμοιων σφαιριδίων.

Για τυχαία διάταξη όμοιων σφαιριδίων τα ενεργά μέτρα συστολής  $K$  και διάτμησης  $G$  συνδέονται με το πορώδες  $\eta$  του πετρώματος, το μέσο πλήθος επαφών ανά σφαιρίδιο  $C$ , την ακτίνα των σφαιριδίων  $R$  και τις δυστροπίες  $S_n$  και  $S_\tau$  των επαφών:

$$K = \frac{C(1-\eta)}{12\pi R} S_n \quad (66)$$

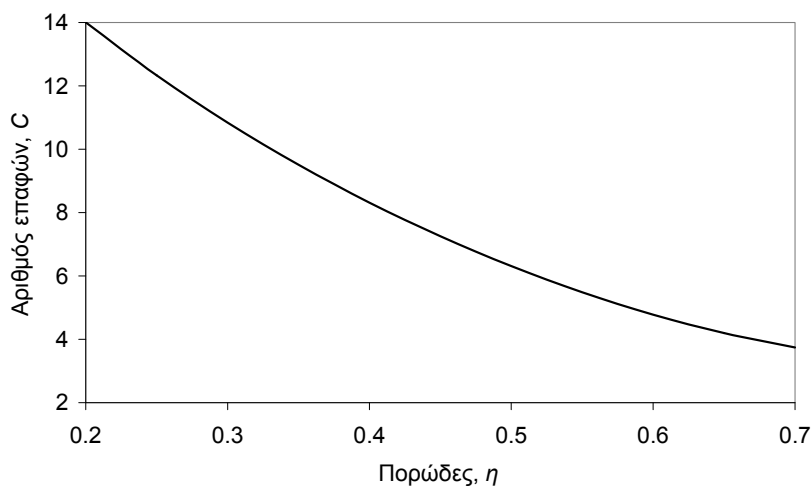
$$G = \frac{C(1-\eta)}{20\pi R} (S_n + 1.5S_\tau) \quad (67)$$

Για απλή κυβική διάταξη όμοιων σφαιριδίων (Σχήμα 14), ο αριθμός επαφών κάθε σφαιριδίου είναι  $C=6$ .



Σχήμα 14. Απλή κυβική διάταξη σφαιριδίων.

Ο Murphy (1982) έδωσε μία προσεγγιστική συσχέτιση του  $C$  με το πορώδες, που δείχνεται στο Σχήμα 15.



Σχήμα 15. Μέσο πλήθος επαφών ανά σφαιρίδιο συναρτήσεως του πορώδους για τυχαία διάταξη σφαιριδίων.

Η ορθή και διατμητική δυστροπία των επαφών μπορούν να υπολογισθούν σύμφωνα με διάφορα μοντέλα, γνωστότερο των οποίων είναι το μοντέλο Hertz-Mindlin:

$$S_n = \frac{4G_m a}{1 - \nu_m} \quad (68)$$

$$S_\tau = \frac{8G_m a}{2 - \nu_m} \quad (69)$$

$G_m, \nu_m$  οι ελαστικές σταθερές του πετρώματος των σφαιριδίων,  $a$  η ακτίνα της επαφής μεταξύ δύο όμοιων σφαιριδίων. Οι ενεργές ελαστικές σταθερές του συστήματος σφαιριδίων είναι:

$$K = \sqrt[3]{\frac{C^2(1-\eta)^2 G_m^2}{18\pi^2(1-\nu_m)^2} P} \quad (70)$$

$$G = \frac{5-4\nu_m}{5(2-\nu_m)} \sqrt[3]{\frac{3C^2(1-\eta)^2 G_m^2}{2\pi^2(1-\nu_m)^2} P} \quad (71)$$

**Παράδειγμα:**  $K_m=37 \text{ GPa}$ ,  $G_m=44 \text{ GPa}$ ,  $P=10 \text{ MPa}$ , *πορώδες 0.36*

Για  $\eta=0.36 \rightarrow$  διάγραμμα σχήματος 10  $C=9.2$

$$\nu_m = \frac{3K_m - 2G_m}{2(3K_m + G_m)} = \frac{3 \times 37 - 2 \times 44}{2(3 \times 37 + 44)} = 0.07$$

$$K = \sqrt[3]{\frac{9.2^2(1-0.36)^2 44^2}{18\pi^2(1-0.07)^2} 0.01} = \dots$$

$$G = \frac{5-4 \times 0.07}{5(2-0.07)} \sqrt[3]{\frac{3 \times 9.2^2(1-0.36)^2 44^2}{2\pi^2(1-0.07)^2} 0.01} = \dots$$

## Συνιστώμενη βιβλιογραφία

- Ashby MF, Sammis CG (1990) The damage mechanisms of brittle solids in compression. *Pageoph* 133:489–521
- Broek, D. (1988), “The Practical Use of Fracture Mechanics”, Kluwer Academic Publishers.
- Budiansky, B. (1965), On the elastic moduli of some heterogeneous materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 13, 223-227.
- Cotterell B, Rice JR (1980) Slightly curved or kinked cracks. *Int J Fracture* 16:155–169

- Fjaer, E., Holt, R.M., Horsrud, P., Raaen, A.M., and R. Risnes (1992), *Petroleum Related Rock Mechanics*. Elsevier, Amsterdam..
- Hill, R. (1952), The elastic behaviour of a crystalline aggregate. In: *Proc. Phys. Soc. A* **65**, pp. 349–354
- Hill, R. (1965), A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids* **13**, pp. 213–222.
- Horii H, Nemat-Nasser S (1985) Compression-induced microcrack growth in brittle solids: axial splitting and shear failure. *J Geophys Res* 90:3105–3125
- ISRM (1988), Commission on Standardization of Laboratory and Field Tests, « Suggested method for determining the fracture toughness of rock », Committee on Laboratory Tests. Published in *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 25, No. 2, pp. 71-96.
- Jaeger J. C., Cook N. G. W. and R. Zimmerman (2007), *Fundamentals of Rock Mechanics*. 4th Ed. Wiley-Blackwell.
- Kuster, G. T. & M. N. Toksöz (1974), Velocity and attenuation of seismic wave in two-phase media. Part I.Theoretical formulations & Part II.Experimental results: *Geophysics* 39, 587-618.
- Mavko, G., T. Mukerji, and J. Dvorkin (1998), *The Rock Physics Handbook*. Cambridge Univ. Press, 1998.
- Murphy, W.F., (1982), *Effects of Microstructure and Pore Fluids on the Acoustic Properties of Granular Sedimentary Materials*. Ph.D. dissertation, Stanford University.
- Reuss, A. (1929) Calculation of the flow limits of mixed crystals on the basis of the plasticity of mono-crystals. *Z. angew. Math. Mech* **9**, pp. 49–58.
- Voigt, W. (1889), Über die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper. *Ann. Phys. (Leipzig)* **38**, pp. 573–587.